JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 4, 13–20 (1971)

Stetigkeitsaussagen bei der Tschebyscheff-Approximation mit positiven Exponentialsummen

ECKARD SCHMIDT

Department of Mathematics, Statistics and Computing Science, The University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada

Communicated by L. Collatz

Received May 29, 1969

Bei der Tschebyscheff-Approximation mit positiven Exponentialsummen hängt die Minimallösung stetig von der Funktion ab, wenn diese normal ist oder die Fehlerfunktion hinsichtlich ihrer Alternantenlänge und ihren Werten am Intervallrand eine bestimmte Bedingung erfüllt.

1. In der vorliegenden Arbeit werden die Stetigkeitsuntersuchungen, die in [5] für allgemeine Exponentialsummen durchgeführt wurden, für positive Exponentialsummen fortgesetzt. Die Tschebyscheff–Approximation[1] stetiger Funktionen mit positiven Exponentialsummen ist nach Untersuchungen, die Braess [1] durchgeführt hat, dadurch gekennzeichnet, daß stets genau eine Minimallösung existiert. Diese wird vollständig durch ein Kriterium charakterisiert, das Länge sowie Vorzeichen der Alternante benutzt.

Es zeigt sich, daß das Stetigkeitsverhalten der T-Approximation in einem Punkt nicht nur davon abhängt, ob dort die Minimallösung ausgeartet ist, sondern auch von der Länge und dem Vorzeichen der Alternante sowie den Werten der Fehlerfunktion in den Randpunkten des Approximationsintervalls. Es gibt Fälle von Stetigkeit der T-Approximation trotz Ausartung der Minimallösung.

2. Eine positive Exponentialsumme (vgl. [1]) ist eine Funktion, welche eine Darstellung

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{t_i x} \tag{2.1}$$

[1] Im weiteren wird für "Tschebyscheff" abkürzend "T" geschrieben.

erlaubt, wobei die t_i reell und verschieden und die a_i nichtnegativ sind. Die Anzahl der nichtverschwindenden Koeffizienten heißt Grad von h und wird mit $k(h)$ bezeichnet. Die Menge der positiven Exponentialsummen, deren Grade höchstens den Wert n haben, wird mit E_n^+ bezeichnet. Es sei $[a, b]$ ein endliches Intervall der reellen Achse und $C[a, b]$ der Raum der auf $[a, b]$ stetigen reellwertigen Funktionen, versehen mit der T-Norm

$$\| \varphi \| := \sup_{[a,b]} | \varphi(x)|. \tag{2.2}$$

Für eine Funktion $f \in C[a, b]$ wird die beste T-Approximierende oder Minimallösung h^* bezüglich E_n^+ wie üblich durch die Bedingung

$$\inf_{h \in E_n^+} \| f - h \| = \| f - h^* \| \tag{2.3}$$

definiert. Der Abstand zwischen dem Punkt f und der Menge E_n^+, d.h. der in (2.3) links stehende Ausdruck heißt wie üblich Minimalabweichung (von f bezüglich E_n^+) und wird mit $\eta_n^+[f]$ bezeichnet. Die Minimalabweichung hängt stetig von der Funktion ab, d.h. aus $\lim \| f_m - f \| = 0$ folgt $\lim | \eta_n^+[f_m] - \eta_n^+[f] | = 0$ (vgl. [7]).

Die zur Charakterisierung der Minimallösung nötigen Begriffe, wie z.B. Alternante und Länge einer Alternante, sind die üblichen. Ferner wird die folgende Bezeichnung gebraucht (vgl. [1]). Eine Alternante einer Funktion $f \in C[a, b]$ heißt negativ (positiv), wenn der Funktionswert von f im ersten Punkt negativ (positiv) ist. Das Maximum der Längen aller Alternanten von f bzw. das Maximum der Längen aller negativen Alternanten von f wird Alternantenlänge von f bzw. negative Alternantenlänge von f genannt und mit alt (f) bzw. $\text{alt}^-(f)$ bezeichnet. Entsprechend wird die positive Alternantenlänge von f ($\text{alt}^+(f)$) definiert. Zur Existenz, Eindeutigkeit und Charakterisierung der Minimallösung bezüglich E_n^+ gelten die folgenden Aussagen.

LEMMA 1 (Braess). *Es sei $f \in C[a, b]$.*

(a) *Es gibt genau eine Minimallösung $T_n^+ f$ von f bezüglich E_n^+.*

(b) *Ein Element $h \in E_n^+$ mit dem Grad k ist genau dann die Minimallösung für f bezüglich E_n^+, wenn (mindestens) eine der beiden Bedingungen erfüllt ist*

(α) $\quad \text{alt}(f - h) \geqslant 2n + 1;$

(β) $\quad \text{alt}^-(f - h) \geqslant 2k + 1.$

Eine unendliche, gleichmäßig auf dem Intervall $[a, b]$ beschränkte Teilmenge von E_n^+ enthält eine Teilfolge, welche nach [4] gleichmäßig im Innern von

(a, b), d.h. gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von (a, b), gegen ein Element von E_n^+ konvergiert. Jede gleichmäßig im Innern von (a, b) konvergente Folge positiver Exponentialsummen konvergiert auch auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gleichmäßig, wenn sich beim Übergang zur Grenzfunktion der Grad nicht reduziert [4]. Ferner gilt das

LEMMA 2. *Eine Folge $\{h_m\} \subset E_n^+$, die gleichmäßig im Innern von (a, b) und punktweise in den Randpunkten gegen eine stetige Funktion h konvergiert, konvergiert auch auf dem abgeschlossenen Interval gleichmäßig gegen diese.*

Beweis. Die Folge ist in den Randpunkten beschränkt, die Schranke sei K. Unter der Annahme, daß die Folge nicht gleichmäßig auf $[a, b]$ konvergiert, gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß zu jedem $m \in \mathbf{N}$ ein $x_m \in [a, b]$ mit $| h_m(x_m) - h(x_m)| \geqslant \epsilon$ existiert.

Wegen der Stetigkeit von h gibt es ein δ mit

$$0 < \delta < \frac{b-a}{2} \cdot \min \left\{1, \frac{\epsilon}{4nK}\right\}, \tag{2.4}$$

so daß

$$| h(x) - h(a)| < \epsilon/4 \qquad \text{für} \quad x \in [a, a + \delta]$$

und

$$| h(x) - h(b)| < \epsilon/4 \qquad \text{für} \quad x \in [b - \delta, b]$$

gilt. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz im Innern von (a, b) gibt es dann ein m_0, so daß mit $m > m_0$ $| h_m(x) - h(x)| < \epsilon/4$ für alle $x \in [a + \delta, b - \delta]$ gilt. Wegen der Konvergenz in den Randpunkten $x = a$ und $x = b$ gilt dort $| h_m(x) - h(x)| < \epsilon/4$, wenn m größer als ein gewisses m_1 ist. Es sei nun ein $m > \max\{m_0, m_1\}$ fest gewählt und ohne Einschränkung $x_m \in [a, a + \delta]$ angenommen. Dann gilt

$$| h_m(a + \delta) - h(a)| \leqslant | h_m(a + \delta) - h(a + \delta)| + | h(a + \delta) - h(a)| < \tfrac{1}{2}\epsilon, \tag{2.5}$$

$$| h_m(x_m) - h(a)| \geqslant | h_m(x_m) - h(x_m)| - | h(x_m) - h(a)| > \tfrac{3}{4}\epsilon. \tag{2.6}$$

Da außerdem $| h_m(a) - h(a)| < \frac{1}{4}\epsilon$ ist, gibt es nach dem Mittelwertsatz entweder in (a, x_m) oder in $(x_m, a + \delta)$ einen Punkt y mit der positiven Steigung $h_m'(y) > \epsilon/4\delta$. Da in der Exponentialsumme

$$h_m(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{t_i x} \tag{2.7}$$

alle $a_i \geqslant 0$ sind, enthält sie einen Summanden $a^* e^{t^* x}$, dessen Steigung im

Punkt y größer als $\epsilon/4n\delta$ ist. Weil wegen $a^* > 0$ auch $t^* > 0$ gilt, ist die Steigung dieses Terms auch in jedem Punkt $x \geqslant y$ größer als $\epsilon/4n\delta$. Im Punkt $x = b$ gilt daher

$$a^* e^{t^* b} > (b - a - \delta) \cdot \frac{\epsilon}{4n\delta} > \frac{b-a}{2} \cdot \frac{\epsilon}{4n\delta} > K. \tag{2.8}$$

Da die anderen Summanden nur nichtnegative Beiträge liefern, gilt auch $h_m(b) > K$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

3. Entsprechend zur rationalen Approximation (Maehly und Witzgall [2], Werner [6]) seien die folgenden beiden Begriffe eingeführt.

Definition 1. Es sei f eine Funktion aus $C[a, b]$ und $T_n^+ f$ ihre Minimallösung bezüglich E_n^+. Die T-Approximation bezüglich E_n^+ heißt stetig im Punkt f, wenn für jede Folge $\{f_m\} \subset C[a, b]$ mit $\lim \|f_m - f\| = 0$ die Folge der zugehörigen Minimallösungen $T_n^+ f_m$ die Bedingung

$$\lim \| T_n^+ f_m - T_n^+ f \| = 0$$

erfülltist.

Definition 2. Die Funktion $f \in C[a, b]$ heißt n^+-normal, wenn ihre Minimallösung bezüglich E_n^+ nicht ausgeartet ist, d.h. nicht in E_{n-1} enthalten ist.

Da zu jeder stetigen Funktion genau eine Minimallösung bez. E_n^+ existiert, ordnen sich diese Begriffe von Normalität und Stetigkeit den in [5] eingeführten unter.

Ein für rationale Funktionen angegebenes Normalitätskriterium [6] gilt mit gleichen Beweis auch für E_n^+:

Lemma 3. *Es seien f und g aus $C[a, b]$, f sei n^+-normal, und es gelte*

$$\|f - g\| < \tfrac{1}{2}(\eta_{n-1}^+[f] - \eta_n^+[f]). \tag{3.1}$$

Dann ist auch g n^+-normal.

Die Menge der n^+-normalen Funktionen ist also offen.

Lemma 4. (vgl. [7]). *Es seien f und g Funktionen aus $C[a, b]$. Dann gilt für die entsprechenden Minimallösungen $T_n^+ f$ und $T_n^+ g$*

$$\| T_n^+ g - f \| \leqslant \| T_n^+ f - f \| + 2 \| g - f \|. \tag{3.2}$$

LEMMA 5. *Es sei f eine Funktion aus $C[a, b] - E_n^+$ mit der Eigenschaft $T_n^+f \neq T_{n+1}^+f$. Dann gilt für die entsprechenden Fehlerfunktionen*

$$\phi := f - T_n^+f \qquad \textit{und} \qquad \psi := f - T_{n+1}^+f \tag{3.3}$$

in jedem Randpunkt x_r des Intervalls

$$-\eta_n^+[f] < \psi(x_r) < \phi(x_r). \tag{3.4}$$

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt mit Lemma 1, daß die Alternantenlänge von $f - T_n^+f$ genau $2n + 1$ beträgt und jede Alternante mit dieser Länge positiv ist. Es sei nun $\{x_i, i = 1,..., 2n + 1\}$ eine Alternante von $f - T_n^+f$. In diesen Punkten ist $f - T_{n+1}^+f$ betragsmäßig kleiner als $f - T_n^+f$. Wegen der Alternanteneigenschaft besitzt daher die Differenzfunktion $T_{n+1}^+f - T_n^+f$ mindestens $2n$ Nullstellen. Andererseits hat sie höchstens den Grad $2n + 1$, deshalb nach [3] höchstens $2n$ Nullstellen, also genau $2n$ Nullstellen. Diese liegen in (x_1, x_{2n+1}). Weil die Alternante positiv ist, gilt

$$-\eta_n^+[f] < \psi(x_j) < \phi(x_j) \qquad \text{für} \quad j = 1, 2n + 1. \tag{3.5}$$

Da aber alle Schnittstellen zwischen ϕ und ψ im offenen Intervall (x_1, x_{2n+1}) liegen, gilt diese Ungleichung auch für die Punkte $x = a$ und $x = b$.

LEMMA 6 (Quasistetigkeit). *Es sei $\{f_m\} \subset C[a, b]$ eine gleichmäßig gegen f konvergente Folge. Dann konvergiert die Folge der zugehörigen Minimallösungen bezüglich E_n^+ gleichmäßig im Innern von (a, b) gegen die Minimallösung von f.*

Zum Beweis werden die gleichen Schlüsse wie für Satz 1 *in* [5] *benutzt.*

Nach diesen Vorbereitungen können nun die Zusammenhänge zwischen der n^+-Normalität und der Stetigkeit der T-Approximation bezüglich E_n^+ angegeben werden.

SATZ. *Es sei $f \in C[a, b]$, h die Minimallösung für f bezüglich E_n^+ und k der Grad von h. Die T-Approximation bezüglich E_n^+ ist genau dann im Punkt f stetig, wenn (mindestens) eine der drei folgenden Forderungen erfüllt ist.*

(1) *Die Funktion f ist n^+-normal.*

(2) *Die Alternantenlänge der Fehlerfunktion $f - h$ beträgt genau $2k + 1$.*

(3) *Die Fehlerfunktion nimmt in beiden Randpunkten des Intervalls den Wert $-\eta_n^+[f]$ an.*

Beweis. Der Rand des Intervalls sei mit R bezeichnet, und die Alternantenlänge von $f - h$ habe den Wert p. Zunächst wird gezeigt, daß die angegebene Bedingung notwendig ist. Wenn sie nicht erfüllt ist, d.h. die Forderungen (1) bis (3) nicht erfüllt sind, dann ist h ein ausgeartetes Element von E_n^+, es ist $p \geqslant 2k + 2$, und für mindestens einen Randpunkt $x_r \in R$ gilt $f(x_r) - h(x_r) \neq -\|f - h\|$. Es sei $\{x_i, i = 1,..., p\}$ eine Alternante von $f - h$, und die Funktion $f - h$ möge zunächst (Fall 1) in x_1 order x_p einen positiven Wert haben. Nach Lemma 8 und Zusatz 1 in [5] gibt es zwei Folgen $\{f_m\} \subset C[a, b]$ und $\{h_m\} \subset E_n^+$ mit den folgenden Relationen:

$$k(h_m) \leqslant k + 1, \tag{3.6a}$$

$$\text{alt}^-(f_m - h_m) \geqslant p + 1, \tag{3.6b}$$

$$\lim \|f_m - f\| = 0, \tag{3.6c}$$

$$\lim \| h_m - h \| \neq 0. \tag{3.6d}$$

Aus der Voraussetzung $p \geqslant 2k + 2$ folgt mit (a) und (b)

$$\text{alt}^-(f_m - h_m) \geqslant 2k(h_m) + 1. \tag{3.7}$$

Nach Lemma 1 ist daher h_m die Minimallösung für f_m bezüglich E_n^+. Aus (b) und (c) ergibt sich dann die behauptete Unstetigkeit der T-Approximation bezüglich E_n^+ im Punkt f.

Es möge nun (Fall 2) $f - h$ in beiden Punkten x_1 und x_p negative Werte haben. Dann ist die Alternantenlänge von $f - h$ ungerade, und es ist $p \geqslant 2k + 3$, Nach Lemma 8 und Zusatz 2 in [5] gibt es zwei Folgen $\{f_m\} \subset C[a, b]$ und $\{h_m\} \subset E_n^+$, für welche die obengenannten Relationen (a), (c) und (d), und statt (b) die Relation (b*) $\text{alt}^-(f_m - h_m) \geqslant p$, gelten. Aus (a) und (b*) ergibt sich $\text{alt}^-(f_m - h_m) \geqslant 2k(h_m) + 1$, und die behauptete Unstetigkeit folgt wie oben. Die Hinlänglichkeit der Forderung (1) für die Stetigkeit folgt aus Satz 3 in [5]. Es sei nun die Forderung (2) erfüllt. Wegen des vorausgehenden Schlusses darf $k < n$ ausgenommen werden. Es sei $\{f_m\} \subset C[a, b]$ eine beliebige gleichmäßig gegen f konvergente Folge. Da f k^+-normal ist, konvergieren die Minimallösungen $T_k^+ f_m$ von f_m bezüglich E_n^+ gleichmäßig gegen h und haben für genügend große Werte von m wegen Lemma 3 den vollen Grad k. Daher ist alt $(f_m - T_k^+ f_m) \geqslant 2k + 1$. Diese Ungleichung gilt auch für die negative Alternantenlänge, wie die folgende Überlegung zeigt. Es sei $x_i^{(m)}$, $i = 1,..., 2k + 1$ eine Alternante von $f_m - T_k^+ f_m$ und I eine Teilmenge von $\mathbf{N}$, für welche die $x_i^{(m)}$ konvergieren. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\{f_m - T_k^+ f_m\}$ gegen $f - h$ ist nach einem Schluß in [8], Seite 120, die durch

$$x_i := \lim_{\substack{m \to \infty \\ I}} x_i^{(m)}, \qquad i = 1,..., 2k + 1, \tag{3.8}$$

gebildete Punktmenge eine Alternante von $f - h$. Wegen der Ausartung von h ist nach Lemma 1 $\mathrm{alt}^-(f - h) \geqslant 2k + 1$. Nach Voraussetzung besitzt $f - h$ keine Alternante mit einer größeren Länge als $2k + 1$. Daher gilt $f(x_1) - h(x_1) = -\|f - h\|$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\{f_m - T_k^+ f_m\}$ gegen $f - h$ ist dann auch $f_m - T_k^+ f_m$ im Punkt $x_1^{(m)}$ negativ, falls nur $m \in I$ genügend groß ist. Das gleiche Resultat gilt für jede andere Teilfolge, für welche die $x_i^{(m)}$ konvergieren, und somit allgemein. Es gilt also $\mathrm{alt}^-(f_m - T_k^+ f_m) \geqslant 2k + 1$. Daher ist $T_k^+ f_m$ zugleich die Minimallösung von f_m bezüglich E_n^+, womit die Behauptung bewiesen ist.

Es möge nun die Forderung (3) erfüllt sein. Da die Behauptung im Fall, daß f n^+-normal ist, bereits bewiesen ist, sei $k < n$ ausgenommen. Es sei $\{f_m\} \subset C[a, b]$ eine gleichmäßig gegen f konvergente Folge. Es werden nun zwei Fälle unterschieden. Wenn (Fall 1) $f \in E_n^+$, ist, dann gilt nach Lemma 4 $\| T_n^+ f_m - T_n^+ f \| \leqslant 2 \|f_m - f\|$, womit die behauptete Stetigkeit gezeigt ist. Im weiteren sei nun (Fall 2) $f \notin E_n^+$.

Wegen der Abgeschlossenheit von E_n^+ (vgl. [1, 4]) darf dann auch $f_m \notin E_n^+$ angenommen werden. Durch Induktion wird nun gezeigt, daß die T-Approximation bezüglich E_j^+, $k \leqslant j \leqslant n$ im Punkt f stetig ist. Für $j = n$ ist dies die zu beweisende Aussage.

Für $j = k$ gilt die Behauptung wegen der k^+-Normalität. Es sei nun für ein j mit $k \leqslant j \leqslant n - 1$ die T-Approximation bezüglich E_j^+ im Punkt f stetig. Wenn für fast alle m $T_j^+ f_m = T_{j+1}^+ f_m$ gilt, ist nach Lemma 1b auch $T_j^+ f_m = T_n^+ f_m$ und daher nichts mehr zu zeigen. Es sei daher $T_j^+ f_m \neq T_{j+1}^+ f_m$ für alle $m \in \mathbf{N}$. Setzt man $\phi_m := f_m - T_j^+ f_m$ und $\psi_m := f_m - T_{j+1}^+ f_m$, dann gilt nach Lemma 5 in jedem Endpunkt x_r von $[a, b]$

$$-\eta_j^+[f_m] < \psi_m(x_r) < \phi_m(x_r). \tag{3.9}$$

Aus der Induktionsannahme folgt mit $\phi := f - h$ für den Grenzübergang $m \to \infty$

$$\phi_m(x_r) \to \phi(x_r). \tag{3.10}$$

Nach Voraussetzung ist

$$\phi(x_r) = -\eta_n^+[f] = -\eta_j^+[f]. \tag{3.11}$$

Da die Minimalabweichung stetig von der Funktion abhängt, gilt wegen $\|f_m - f\| \to 0$

$$\eta_j^+[f_m] \to \eta_j^+[f]. \tag{3.12}$$

Es ist also $\lim \psi_m(x) = \phi(x)$ für $x = a$ und $x = b$. Dort stimmt auch die Grenzfunktion der $T_{j+1}^+ f_m$ mit h überein. Nach Lemma 6 konvergiert diese

Folge gleichmäßig im Innern von (a, b) gegen h und daher nach Lemma 2 gleichmäßig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Damit ist die Behauptung auch in diesem Fall gezeigt und somit der Satz bewiesen.

Im Gegensatz zur Klasse der rationalen Funktionen und auch der eigentlichen Exponentialsummen gibt es bei den positiven Exponentialsummen Fälle von stetiger Abhängigkeit der T-Approximation trotz Ausartung der Minimallösung. Dies zeigt das folgende

Beispiel. Gegeben sei ein $\delta > 0$ und Wertepaare $\{x_i, y_i\}$ mit $x_1 = 0$, $x_3 = 1$ und x_2 beliebig aus $(0, 1)$ sowie $y_i = e^{x_i} + (-1)^i \cdot \delta$, $i = 1, 2, 3$. Diejenige Funktion $f \in C[0, 1]$, welche durch den Streckenzug durch die Punkte $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, 3$, bestimmt ist, wird bezüglich jeder Menge E_n^+, $n \geqslant 1$, optimal durch die Exponentialsumme $h(x) = e^x$ approximiert. Die Alternantenlänge der Fehlerfunktion beträgt genau 3, d.h. $2k(h) + 1$. Nach dem vorausgehenden Satz ist die T-Approximation bezüglich E_n^+, $n \geqslant 1$, stetig im Punkt f, obwohl für $n \geqslant 2$ die Minimallösung bezüglich E_n^+ ausgeartet ist.

Diese Arbeit ist Teil meiner am Rechenzentrum der Universität Münster angefertigten Dissertation. Herrn Prof. Dr. H. Werner danke ich für die Förderung der Arbeit und Herrn Dr. D. Braess für zahlreiche Diskussionen.

Literatur

1. D. Braess, Approximation mit Exponentialsummen, *Computing* **2** (1967), 309–321.
2. H. J. Maehly und Ch. Witzgall, Tschebyscheff-Approximation in kleinen Intervallen II, Stetigkeitssätze für gebrochen rationale Approximation, *Numer. Math.* **2** (1960), 293–307.
3. G. Polya und G. Szegö, "Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis," Band 2, S. 49, Springer Verlag, Berlin/New York, 1960.
4. E. Schmidt, Zur Kompaktheit bei Exponentialsummen, *J. Approximation Theory* **3**, (1970), 445–454.
5. E. Schmidt, Stetigkeitsaussagen bei der Tschebyscheff-Approximation mit Exponentialsummen, *Math. Z.* **113** (1970), 159–170.
6. H. Werner, On the rational Tschebyscheff operator, *Math. Z.* **86** (1964), 317–326.
7. H. Werner, Die Bedeutung der Normalität bei rationaler Tschebyscheff-Approximation, *Computing* **2** (1967), 34–52.
8. H. Werner, "Vorlesung über Approximationstheorie," Springer Verlag, Berlin/New York, 1969.